



PROGRAMA DE MATEMATICAS APLICADAS **A LAS CIENCIAS SOCIALES**

I. ELEMENTOS BÁSICOS.

1. Introducción al número real.

- Números enteros. Números racionales.
- Números irracionales. Números reales.
- La recta real. Intervalos.
- Aproximación decimal de un número real.

2. Ecuaciones e inecuaciones algebraicas.

- Polinomios.
- Ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado.
- Factorización de polinomios.
- Representación gráfica de polinomios de primer y segundo grado.
- Inecuaciones algebraicas de primer y segundo grado.

3. Sistemas de ecuaciones lineales.

- Matrices. Rango de una matriz. Álgebra de matrices.
- Determinantes: Propiedades.
- Matriz inversa: Cálculo de una matriz inversa.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Método de Gauss.
- Teorema de Rouché-Frobenius. Discusión de un sistema.

4. Ecuaciones de la recta en el plano. Programación Lineal.

- Sistemas de referencias y coordenadas.
- Ecuaciones de la recta en el plano. Posición relativa de dos rectas.
- Planteamiento y resolución de problemas sencillos de Programación Lineal.

5. Matemática financiera.

- Progresiones aritméticas y geométricas.
- Interés simple y compuesto.
- Tasas de amortizaciones y capitalizaciones.

6. Funciones.

- Definición y elementos que intervienen en una función.
- Funciones polinómicas, valor absoluto, parte entera y racionales.
- Función exponencial y función logarítmica.
- Funciones definidas a trozos.
- Idea intuitiva de límite de una función en un punto.
- Continuidad. Tipos de discontinuidad.
- Tendencias asintóticas.



7. Derivadas.

- Definición de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.
- La derivada como tasa de variación. Ejemplos.
- Métodos de derivación de funciones elementales. Regla de la cadena.
- Propiedades algebraicas.
- Aplicaciones de las derivadas:
 - Recta tangente a una función en un punto.
 - Máximos y mínimos. Problemas de optimización.
 - Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
 - Representación gráfica de funciones polinómicas sencillas.

8. Integrales.

- Área bajo una curva.
- Aproximación intuitiva a la integral definida.
- Integral indefinida. Propiedades elementales.
- Cálculo de integrales indefinidas inmediatas o reducibles a inmediatas.
- Aplicación de la integral a la resolución de problemas en ciencias sociales y economía.

II. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.

9. Estadística descriptiva unidimensional.

- Datos estadísticos. Tipos de variables.
- Medidas de tendencia central.
- Medidas de dispersión. Momentos.
- Otros parámetros de interés.
- Agrupación en intervalos de clases.
- Diagramas de barras.
- Histogramas
- Polígonos de frecuencias.

10. Estadística descriptiva bidimensional.

- Estudio conjunto de dos variables.
- Tablas de frecuencias bidimensionales.
- Distribuciones marginales y condicionadas. Independencia.
- La recta de regresión.
- Coeficiente de correlación lineal. Interpretación.



III. PROBABILIDAD.

11. Probabilidad.

- Variaciones. Permutaciones. Combinaciones.
- Distintas aproximaciones al concepto de probabilidad.
- Experimentos aleatorios. Sucesos.
- Definición de probabilidad. Propiedades.
- Asignación de probabilidades.

12. Probabilidad condicionada.

- Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos.
- Regla de la probabilidad total. Teorema de Bayes.

13. Variables aleatorias.

- Variables aleatorias discretas:
 - Distribución binomial.
 - Distribución uniforme.
 - Funciones de probabilidad y de distribución.
- Esperanza matemática y varianza de una variable aleatoria discreta.
- Variables aleatorias continuas:
 - Distribución uniforme continua.
 - Distribución normal.
 - Funciones de densidad de probabilidad y de distribución.
- Esperanza matemática y varianza de una variable aleatoria continua.
- Aproximación de la binomial mediante la normal. Teorema del límite central.

IV. ESTADÍSTICA INFERENCIAL.

14. Muestreo.

- Muestra y población. Representatividad de una muestra.
- Parámetros de una población.
- Muestreo aleatorio simple.
- Muestreo sistemático.
- Muestreo estratificado.

15. Estadística inferencial paramétrica.

- Estimación puntual.
- Distribución de la media muestral.
- Distribución de la proporción muestral.
- Intervalos de confianza:
 - Del parámetro p de la binomial.
 - De la media de la normal.
- Contrastes de hipótesis:
 - Para el parámetro p de la binomial.
 - Para la media.
 - Para la diferencia de medias.



ORIENTACIONES

Los contenidos pretenden abarcar los conocimientos indispensables para una prueba de acceso a estudios de titulaciones propias de las Ciencias Sociales.

En ese sentido, se consideran cuatro apartados: **ELEMENTOS BÁSICOS, ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA, PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL**, cuya impartición está desarrollada en 15 capítulos.

Se comentan algunos detalles sobre las orientaciones metodológicas correspondientes.

I. ELEMENTOS BÁSICOS.

1. Introducción al número real.

- Números enteros. Números racionales.
Se pueden introducir los números enteros como ampliación de los naturales, que resultan insuficientes para invertir la suma. Conviene resaltar su estructura más intrínseca basada en la suma, el producto y en sus correspondientes propiedades. Al profundizar en el producto se pueden introducir los números racionales. Recordar las clásicas reglas para sumar, multiplicar y dividir quebrados, así como la identificación de los racionales con los números decimales con parte decimal finita o periódica.
- Números irracionales. Números reales.
Siguiendo con la identificación con los decimales, se pueden presentar los números irracionales como aquellos que tienen parte decimal infinita no periódica. Con ello se completan todo los números reales y se identifican con todos los números decimales.
- La recta real. Intervalos.
Concepto de intervalo; abierto, cerrado, intervalos no acotados, etc... Se resaltarán las propiedades de continuidad y ordenación de los números reales.
- Aproximación decimal.
Insistir en la representación decimal de los reales. Escala decimal. Potencias enteras en base 10. Notación científica.

2. Ecuaciones e inecuaciones algebraicas.

- Polinomios.
Los polinomios pueden ser introducidos directamente, sin grandes aparatos. Interesa sobre manera destacar el papel de la indeterminada, de los coeficientes y del grado del polinomio. Conviene forzar la comprensión y dominio de las operaciones básicas: suma algebraica, producto y división.
- Ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado.
De las ecuaciones algebraicas, sólo consideraremos las de primer grado y las de segundo grado, mediante las operaciones y algoritmos usuales. Como extensión inmediata, se pueden resolver las ecuaciones bicuadradas.
- Factorización de polinomios.
Se deben tratar algunas cuestiones elementales sobre factorización en monomios. Para ello, el método adecuado es el algoritmo de Ruffini.



- Representación gráfica de polinomios de primer y segundo grado.
Representación de rectas identificando la pendiente y ordenada en el origen. Representación de parábolas, determinando el vértice, cortes con los ejes, su carácter de cóncava o convexa, etc...
- Inecuaciones algebraicas de primer y segundo grado.
Resolución analítica y gráfica apoyándonos en las representaciones de rectas y parábolas..

3. Sistemas de ecuaciones lineales.

- Matrices. Rango de una matriz. Álgebra de matrices.
Introducir directamente las matrices y sus traspuestas. Las operaciones suma y producto de matrices serán introducidas con abundantes ejemplos, así como algunas ideas sobre ecuaciones matriciales. Se debe dar el concepto de rango apoyado en la independencia lineal de filas y columnas aunque posteriormente se caracterice el rango con la ayuda de determinantes.
- Determinantes: Propiedades.
Se introducirá el algoritmo para el cálculo de determinantes de matrices cuadradas de orden dos y la Regla de Sarrus para las de orden tres. Con ello se deben motivar las propiedades de los determinantes para esos casos, mencionando su extensión para ordenes superiores. En particular, se resaltaré el cálculo del determinante por el desarrollo de los adjuntos de una línea.
- Matriz inversa: Cálculo de una matriz inversa.
Sobre las matrices cuadradas de determinante no nulos, se introducirá la matriz inversa y su cálculo, esencialmente para matrices de segundo y tercer orden.
- Método de Gauss.
Por su potencia y versatilidad, se presentará el clásico Método de Gauss, avanzando su aplicación a la resolución de sistemas algebraicos de tres incógnitas, a lo sumo. Se puede, también, utilizar este método para la obtención de la inversa de una matriz cuadrada.
- Teorema de Rouché-Frobenius. Discusión de un sistema.
Se enuncia el teorema haciendo hincapié en su utilidad para discutir sistemas que dependen de un parámetro con tres incógnitas a lo sumo.

4. Ecuaciones de la recta en el plano. Programación Lineal

- Sistemas de referencias y coordenadas.
La descripción de los elementos del espacio a partir de un sistema de referencia basado en un origen y en una base de vectores resulta capital para su estudio geométrico. Se hará especial hincapié en la importancia de las coordenadas correspondientes.
- Ecuaciones de la recta en el plano. Posición relativa de dos rectas.
Se introducirán la ecuación de la recta en el plano, en sus distintas formas, destacando el importante papel del vector de dirección y el concepto de pendiente de una recta. Estudiar la posición relativa de dos rectas tanto desde el punto de vista vectorial como en la relación entre pendientes.
- Planteamiento y resolución de problemas sencillos de programación lineal.
Entre los problemas de optimización sobre convexos destaca, por su sencillez, los de la Programación Lineal, cuyos recintos están encerrados por líneas rectas. Puesto que la función objetivo es lineal, podemos usar la representación gráfica de la misma desplazada por el recinto para resolver este tipo de problemas. Se ilustrará con ejemplos de las Ciencias Sociales.



5. Matemática financiera.

- Progresiones aritméticas y geométricas.
Las progresiones aritméticas y geométricas son una buena base para un primer contacto con las sucesiones números reales. Se ilustrarán aquellas con gran números de ejemplos que aparecen en la práctica, dedicando especial atención a sus propiedades más importantes y entre ellas a la suma de sus términos.
- Interés simple y compuesto.
Aplicación de las progresiones a la aritmética mercantil.

6. Funciones.

- Definición y elementos que intervienen en una función.
Se trata de presentar, realzando su definición, ejemplos de funciones, realizando ejemplos sencillos de composición de funciones. Mediante ejemplos se puede esbozar la idea de acotación y simetría, familiarizándose, en particular, con las funciones pares e impares. Con ejemplos, se introducirán las funciones monótonas.
- Funciones polinómicas, valor absoluto, parte entera y racionales.
Insistir en los polinomios de grados uno y dos y generalizar a polinomios de mayor grado resaltando sus propiedades de regularidad. Valor absoluto y propiedades, parte entera como función escalonada y funciones racionales sencillas.
- Función exponencial y función logarítmica.
Se comenzará definiendo el logaritmo y señalando sus propiedades. Se establecerá la relación entre las funciones logaritmo y exponencial y se dará detalle de sus gráficas.
- Idea intuitiva de límite de una función en un punto.
Mediante ejemplos sencillos, se presentará la idea intuitiva, dedicando especial atención a las funciones polinómicas.
- Continuidad. Tipos de discontinuidad.
Los ejemplos y comentarios del apartado anterior se refuerzan ahora con la noción de continuidad. Se introducirán, entonces, las funciones discontinuas, de las que sólo se comentarán las discontinuas de salto. Se realzará la idea de función continua en un intervalo mediante resultados de valores intermedios.

7. Derivadas.

- Definición de derivada de una función en un punto.
Mediante el paso al límite de los cocientes incrementales, se introducirá la noción de derivada en un punto. Para ello la idea de velocidad instantánea como límite de velocidades medias y la de la tangente como límite de secantes resulta de gran ayuda. Se ilustrará que toda función derivable en un punto es continua en el mismo. Mediante ejemplos, se mostrará que el resultado recíproco puede no ser cierto.
- La derivada como tasa de variación. Ejemplos.
Se realzará con más detalle la idea de derivada en un punto como límite de la tasa de variación de la función con respecto a las distancias de los puntos próximos. Se ilustrará la idea mediante ejemplos de las aplicaciones a las Ciencias Sociales, muy particularmente con funciones que dependan de una variable temporal.



- Derivadas de funciones elementales. Regla de la cadena.
Se trata de complementar las nociones anteriores, para lo que se probará la derivada de una suma y se esbozarán la derivada de un producto, de una potencia de un cociente, de una raíz, y de las funciones exponenciales y logarítmicas. Con la Regla de la Cadena se obtendrán las derivadas de las funciones inversas.
- Aplicaciones de las derivadas.
Con el uso de los cociente incrementales se caracterizará las funciones monótonas mediante el signo de la función primera derivada, culminando, a su vez, con la monotonía de esta función y determinado los extremos relativos de una función. El uso, ahora, de los cocientes incrementales de la función primera derivada caracterizará las funciones cóncavas y convexas mediante el signo de la función segunda derivada, determinándose con mayor comodidad los extremos relativos de una función. Se usan todos los conocimientos anteriores: para estudiar y localizar los extremos relativos de una función, que junto con los cortes con los ejes y simetría permitirá esbozar la gráfica de funciones. Se hará especial hincapié en los problemas optimización que se pueden abordar con la herramienta de los máximos y mínimos locales, ilustrados con abundantes ejemplos de las aplicaciones en las Ciencias Sociales.

8. Integrales.

- Integral definida. Área bajo una curva.
Se introducirá el concepto de integral definida y se esbozará su interpretación como área de la región definida bajo una curva.
- Integral indefinida. Propiedades elementales. Cálculo de integrales.
*Concepto de primitiva de una función y propiedades. Bastará con apoyarse en la idea inversa del concepto de derivación. Se obtendrán tablas de integrales indefinidas complementarias de las de derivadas ya obtenidas en apartados anteriores. El método de **cambio de variable** sólo se aplicará a casos sencillos que transformen la integral en una que se obtenga por las propiedades de apartados anteriores.*
- Aplicación al cálculo de áreas planas.
Una gran cantidad de ejemplos de las Ciencias Sociales pueden ser abordados mediante el cálculo de adecuadas áreas planas, a su ilustración se dedicará especial atención. , mediante el uso del Teorema Fundamental del Cálculo Integral y de la Regla de Barrow, que sólo tendrán que conocer. Las técnicas para el cálculo de primitivas resultarán imprescindibles para la obtención de esas áreas

II. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.

9. Estadística descriptiva unidimensional.

- Datos estadísticos.
Se presentarán las ideas fundamentales acerca de la naturaleza de los datos cualitativos o cuantitativos que suelen ser objeto de las técnicas estadísticas.
- Medidas de tendencia central.



*Se presentarán las medidas de tendencia central como idealización de las series de frecuencias o variables estadísticas unidimensionales. Con respecto al tamaño se considerará la **media aritmética**, estableciendo su similitud con el **centro de gravedad** de un sistema mecánico de masas puntuales. Con respecto a la frecuencia, se introducirá la **moda**, y con respecto a la acumulación de las frecuencias se considerará la **mediana**.*

- Medidas de dispersión. Momentos
*Como es habitual se considerarán, como medidas de dispersión, los promedios, de orden positivo, de las desviaciones respecto del origen y respecto de la media aritmética. En particular, se resaltarán la importancia de la **variancia** y de la **desviación**. Se introduce el concepto general de momento.*
- Otros parámetros de interés.
Todos aquellos parámetros que ilustran sobre la distribución de frecuencias: Percentiles, sesgo, curtosis, coeficiente de variación...
- Agrupación en intervalos de clases.
*Para facilitar su interpretación gráfica, las series unidimensionales se agrupan en intervalos de clase, preferentemente de igual longitud y con la **marca de clase** realizada.*
- Diagramas de barras.
Son los más sencillos, sobre cada marca se representa la frecuencia acumulada de la clase.
- Histogramas
*Entre las representaciones gráficas de series agrupadas destacaremos los **histogramas**, con especial detenimiento en las propiedades de área subyacentes.*
- Polígonos de frecuencias.
*En los **polígonos de frecuencias** se anuncia las funciones de densidad, y en los **polígonos de frecuencias acumulativas u ojivas** las funciones de distribución.*

10. Estadística descriptiva bidimensional.

- Estudio conjunto de dos variables
Al considerar simultáneamente dos caracteres cuantitativos surgen las series de frecuencias o variables estadísticas bidimensionales de las que, usualmente interesan sus distribuciones de frecuencias conjuntas.
- Tablas de frecuencias bidimensionales.
A las medidas de centralización y dispersión individuales, se añaden los parámetros que caracterizan la distribución conjunta..
- Distribuciones marginales y condicionadas. Independencia.
*Las distribuciones marginales se pueden introducir al limitarnos exclusivamente a uno de los caracteres de una tabla bidimensional, prescindiendo del otro. En las condicionadas uno de los caracteres se considera libremente mientras que el otro está sujeto a una condición plausible. Se llega entonces a la dependencia o independencia de los caracteres de una serie bidimensional.
Tanto en las marginales como en las condicionadas interesan sus distribuciones de frecuencias.*
- Recta de regresión.
*Sencillos argumentos permiten abordar en promedio la eventual dependencia lineal, y sus asociadas, entre los caracteres de una serie bidimensional. La única información conjunta requerida es la **covarianza**.*



- Correlación lineal. Interpretación.
El coeficiente de correlación es una medida de tal dependencia lineal, alcanzando para los valores $+1$ y -1 la expresión de su idoneidad.

III. PROBABILIDAD.

11. Probabilidad.

- Variaciones. Permutaciones. Combinaciones.
Se introducirán, con ejemplos sencillos, las variaciones, resaltando la importancia de la ordenación, en cada agrupación. Se obtendrá la fórmula del número de las variaciones. Como caso particular se introducirán las permutaciones y los números factoriales.
Cuando prescindimos de la ordenación, en las variaciones, obtenemos las combinaciones, cuya cantidad va asociada a los números combinatorios, de los que obtendremos sus principales propiedades, así como su intervención en la fórmula del binomio de Newton.
- Introducción a la probabilidad.
Se introduce de manera intuitiva el concepto de probabilidad como idealización de la frecuencia relativa.
- Experimentos aleatorios. Sucesos.
El álgebra de las partes de un conjunto y sus propiedades resulta particularmente adecuado al estudiar un fenómeno aleatorio. En efecto, asociado a los resultados finales se considera el espacio muestral correspondiente, del que sus subconjuntos se identificarán con sucesos del experimento.
- Probabilidad. Propiedades. Asignación de probabilidades.
Debido a su naturaleza aleatoria, antes de realizar un experimento de ese tipo no sabemos el resultado concreto que se va a producir. Las probabilidades son una expresión de tal acontecimiento. Se introducirá axiomáticamente la medida de probabilidad. A partir de sus propiedades básicas se obtendrán su comportamiento ante la inclusión, la diferencia conjuntista y la unión no disjunta. Para la asignación de probabilidades, dedicaremos especial atención al caso de fenómenos discretos cuyos sucesos finales son equiprobables, lo que permitirá la asignación de probabilidades a partir de la clásica Regla de Laplace.

12. Probabilidad condicionada.

- Probabilidad condicionada.
En una gran cantidad de situaciones debemos limitar la consideración de un fenómeno aleatorio bajo la restricción de algunos de sus sucesos posibles. Se introducirá la probabilidad de sucesos condicionados y la independencia de sucesos. Se obtendrá entonces la Regla del producto.
- Regla de la probabilidad total. Teorema de Bayes.
Una de las más importantes aplicaciones de las probabilidades condicionadas son los Teorema de la probabilidad total y de Bayes. Para este último consideraremos los sucesos a posteriori.



13. Variables aleatorias.

- Variables discretas.
Se introduce directamente la distribución binomial como “recuento de éxitos en n pruebas independientes conocida la probabilidad fija de éxito en cada prueba. Surgen de manera natural todos los conceptos relativos a variables aleatorias. Concepto de variable aleatoria, distintos tipos y elementos de las variables.
- Función de distribución.
*La información más ventajosa de las variables aleatorias va en la distribución acumulativa de las mismas. Se estudiarán las principales propiedades de dicha función: monotonía, continuidad a la derecha. Se prestará especial atención a los **cuantiles** y en concreto a los **cuartiles**.*
- Variables discretas. Esperanza matemática de una variable discreta.
*Se introduce la función de probabilidad paralela a las frecuencias relativas en distribuciones de frecuencias. Se prestará especial atención a la **esperanza matemática** y a la **varianza** asociada, así como a los **cuartiles** y percentiles.*
- Distribución uniforme discreta.
Presentaremos la distribución uniforme discreta. Comentaremos los valores de su media y de su varianza. Se suscitará el interés posible en muestreo.
- Variables continuas. Densidad de probabilidad.
*Para las variables cuya distribución es continua, la acumulación viene dada por el área encerrada por la función de densidad. Se prestará especial atención a la **esperanza matemática** y a la **varianza** asociada, así como a los **cuantiles** y en concreto a los **cuartiles**, para esta situación.*
- Distribución normal.
Presentaremos las distribuciones normales mediante el uso de las tablas para la tipificada e ilustraremos con ejemplos de las aplicaciones su uso, preferentemente en Ciencias Sociales. Se esbozará que es el caso límite de distribuciones binomiales.
- Distribución uniforme continua.
Se explica la variable uniforme continua. Puede ser conveniente hacer mención a la existencia de otro tipo de distribuciones como ji-cuadrado, t de Student etc..., que tienen gran importancia en inferencia estadística.

IV. ESTADÍSTICA INFERENCIAL.

14. Muestreo.

- Muestreo y población.
Poner de manifiesto la importancia del muestreo para el estudio de las propiedades de poblaciones. Dejar claro los conceptos relativos a los parámetros poblacionales y sus correspondientes muestrales.
- Tipos de muestreo: Muestreo aleatorio simple, sistemático y estratificado.
Estudiar los tipos de muestreo señalados poniendo de manifiesto su adecuación a diferentes poblaciones.



15. Estadística inferencial paramétrica.

- Estimación puntual.
Se ilustrarán las ideas básicas utilizando ejemplos de las aplicaciones a las Ciencias Sociales. Aunque se puede hablar de la estimación de diferentes parámetros nos limitaremos en la práctica a la media.
- Distribución de la media muestral.
Hacer hincapié en el carácter variable de las observaciones muestrales y la distribución a la que responden.
- Intervalos de confianza. Contrastes de hipótesis.
Con la asunción de la normalidad de la población se aborda la estimación mediante intervalos de confianza. Se estudian en concreto, los relativos a la media de la normal y al parámetro p de la binomial.
- Contrastes de hipótesis.
Se introducen los conceptos que intervienen en el contraste de hipótesis. Adecuación del tamaño de las muestras al nivel de confianza y el nivel de significación requeridos en los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis.

BIBLIOGRAFÍA.

- **Colección de libros de matemáticas para 3º y 4º de ESO y Bachillerato**, editados por ANAYA y coordinados o escritos por M. de Guzmán y José Colera.
- **Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales**. Nortes, Jiménez y otros. 1º y 2º de Bachillerato. Editorial Santillana.
- **Matemáticas**. (Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años) J.T. Pérez Romero-J.A. Jaramillo Sánchez. Editorial MAD S. L.
- **Estadística**. (Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años) J.T. Pérez Romero. Editorial MAD S. L.