



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PARA MAYORES DE 25 AÑOS
AÑO 2021
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

TIEMPO: 1 Hora y 30 minutos.
INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir **una** de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente **a los cuatro ejercicios** de que consta la opción elegida. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
PUNTUACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (3 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} mx + y - z = 2 \\ x + 3y + z = 1 \\ 3x + 10y + 4z = 3 \end{cases}$$

- Estúdiese la compatibilidad del sistema en función de los valores de m .
- Resuélvase el sistema para $m = 1$.
- Resuélvase el sistema para $m = 2$.

Ejercicio 2. (2,5 puntos)

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

- Resuélvase la ecuación $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ y factorícese el polinomio $P(x)$.
- Determinése la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 3. (2 puntos)

En la ciudad A el 20% de los votantes han optado por el partido X, el 30% por Y y el 50% por Z. En la ciudad B el 45% han votado a X, el 35% a Y y el 20% a Z.

- Se elige al azar una ciudad (A o B) y un individuo. ¿Cuál es la probabilidad de que haya votado a Y?
- Se elige al azar una ciudad (A o B) y un individuo y se observa que ha votado a Z. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la ciudad A?

Ejercicio 4. (2,5 puntos)

La distribución de ventas de determinado medicamento en una farmacia en un mes fue la siguiente:

Ventas	(0,4]	(4,8]	(8,12]	(12,16]	(16,20]	(20,24]
Nº de días	8	6	5	5	3	3

- Hállese el número medio de pedidos y el intervalo modal.
- Calcúlese la mediana e interprétese el resultado obtenido.
- Dibújese un histograma de frecuencias relativas.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (2,5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calcúlense los valores de m para los que la matriz A no es invertible.
- Para $m = 0$, obténgase la inversa de la matriz A .
- Para $m = 0$, obténgase la matriz $C = A^2B$. ¿Es C invertible? Justifique la respuesta.

Ejercicio 2. (3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \log x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Determinése el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
- Para $a = 0$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = -1$.
- Un capital produce intereses durante 4 años al 10% de interés compuesto. El capital al cabo de estos 4 años es de 14641 euros. ¿Cuál era el capital inicial?

Ejercicio 3. (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(\bar{A}) = 0'4 \quad P(B) = 0'3 \quad P(A \cup B) = 0'8$$

Determinése:

- $P(A)$
- $P(A \cap B)$
- $P(\bar{B} / \bar{A})$
- ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

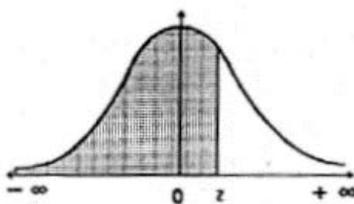
Nota: \bar{S} denota el suceso complementario del suceso S .

Ejercicio 4. (2,5 puntos)

Se considera una variable aleatoria X con distribución normal de media 10 y desviación típica 2.

- Determinése la probabilidad de que X sea mayor que 13.
- Si se toma una muestra aleatoria de tamaño 100, calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 9'5.
- Supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño n . ¿Qué tamaño mínimo debe tener dicha muestra para que el error máximo cometido por la estimación de la media sea menor que 0'5 con un nivel de confianza del 95%?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0;1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0;1), esté por debajo del valor z.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCION A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima 3 puntos)

- a) Cálculo correcto del determinante: 0,25 puntos. Determinación del valor crítico: 0,25 puntos, Discusión de casos: 0,5 puntos.
- b) Resolución Correcta: 0,5 puntos.
- c) Resolución Correcta: 1,5 puntos. (0,5 puntos cada variable)

Ejercicio 2. (Puntuación máxima 2,5 puntos)

- a) Planteamiento correcto: 0,25 puntos. Obtención correcta de las raíces, 0,75 puntos (0,25 cada una). Factorización correcta: 0,5 puntos.
- b) Obtención del punto de tangencia, 0,25 puntos. Cálculo correcto de la derivada, 0,25 puntos. Cálculo de la pendiente 0,25 p. Expresión correcta de la ecuación de la recta 0,25 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima 2 puntos)

- a) Planteamiento correcto: 0,5 puntos. Probabilidad correcta: 0,5 puntos.
- b) Planteamiento correcto: 0,5 puntos. Probabilidad correcta: 0,5 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima 2,5 puntos)

- a) Media. 0,5 puntos. Intervalo modal, 0,25 puntos.
- b) Intervalo mediano, 0,25 puntos. Planteamiento correcto cálculo mediana, 0,25 puntos. Resultado correcto 0,25 puntos. Interpretación adecuada, 0,25 puntos.
- c) Cálculo correcto frecuencias relativas: 0,25 puntos; Histograma: 0,5 puntos.

OPCION B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima 2,5 puntos)

- a) Cálculo correcto del determinante, 0,25 puntos. Obtención correcta del valor de m , 0,25 puntos.
- b) Procedimiento correcto: 0,5 puntos. Cálculo correcto de la inversa, 0,5 puntos.
- c) Obtención de A^2 : 0,5 puntos. Obtención de C , 0,25 puntos. Justificación no invertible: 0,25 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima 3 puntos)

- a) Condiciones de continuidad, 0,5 puntos. Cálculo correcto de a , 0,5 puntos.
- b) Planteamiento correcto de la integral, 0,25 puntos. Obtención de la primitiva, 0,25 puntos. Cálculo correcto del área, 0,5 puntos.
- c) Planteamiento correcto, 0,5 puntos. Solución correcta, 0,5 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima 2 puntos)

- Cada apartado a), b), c): Planteamiento correcto: 0,25 puntos. Probabilidad correcta: 0,25 puntos.
- d) Respuesta correcta: 0,5 puntos

Ejercicio 4. (Puntuación máxima 2,5 puntos)

- a) Planteamiento correcto, 0,5 puntos. Cálculo correcto de la probabilidad, 0,25 puntos.
- b) Planteamiento correcto, 0,5 puntos. Cálculo correcto de la probabilidad, 0,25 puntos.
- c) Obtención de $Z_{\alpha/2}$, 0,25 puntos. Planteamiento correcto, 0,5 puntos. Cálculo correcto, 0,25 p.

SOLUCIONES
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

Ejercicio 1: a)

$$(A) = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad (\bar{A}) = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 12m - 10 + 3 + 9 - 10m - 4 = 2m - 2$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

- Si $m \neq 1$ $\text{rg}(A) = \text{rg}(\bar{A}) = 3$, S.C.D.
- Si $m = 1$ $\text{rg}(A) = 2$; $\text{rg}(\bar{A}) = 3$, S. Incompatible

b) Para $m = 1$ el sistema es incompatible. Por tanto no tiene solución.

c) Para $m = 2$, $|A| = 2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{0}{2} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Ejercicio 2:

a) Por Ruffini: Raíces: $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$$

b) $P(2) = 8 - 12 - 2 + 3 = -3$. $P'(x) = 3x^2 - 6x - 1$, $P'(2) = 12 - 12 - 1 = -1$

La recta tangente pasa por el punto $(2, -3)$ y tiene como pendiente $m = -1$.

$$(y+3) = -(x-2) \Rightarrow y = -x-1.$$

Ejercicio 3:

$$P(A) = 0'5 \quad ; \quad P(X/A) = 0'2 \quad ; \quad P(X/B) = 0'45$$

$$P(B) = 0'5 \quad ; \quad P(Y/A) = 0'3 \quad ; \quad P(Y/B) = 0'35$$

$$P(Z/A) = 0'5 \quad ; \quad P(Z/B) = 0'2$$

a) Por el teorema de la probabilidad total,

$$P(Y) = P(Y/A)P(A) + P(Y/B)P(B) = 0'325.$$

b) Por el teorema de Bayes,

$$P(A/Z) = \frac{P(Z/A)P(A)}{P(Z)} = \frac{0'5 \cdot 0'5}{0'35} = 0'714.$$

Ejercicio 4:

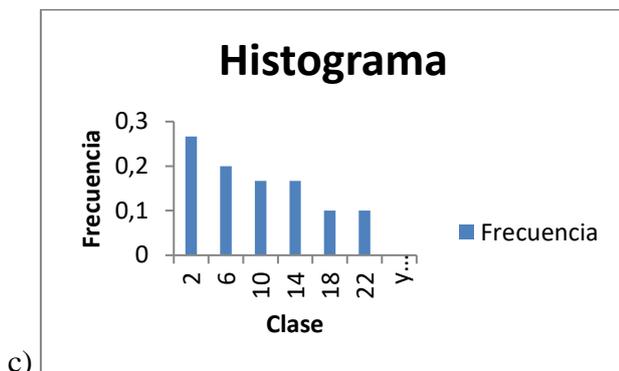
Li-Ls	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	r_i
(0-4]	2	8	8	16	0,26
(4-8]	6	6	14	36	0,2
(8-12]	10	5	19	50	0,17
(12-16]	14	5	24	70	0,17
(16-20]	18	3	27	54	0,1
(20-24]	22	3	30	66	0,1
		N=30		=292	1

a) El número medio de ventas $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i f_i}{N} = \frac{292}{30} = 9,73$ ventas. El intervalo modal es (0,4].

b) La mitad de los datos $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$. La primera frecuencia acumulada mayor que 15 corresponde a la clase (8-12]. Esta es la clase mediana, y la mediana es:

$$M = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} t_i = 8 + \frac{15 - 14}{5} 4 = 8,8 \text{ ventas.}$$

Interpretación: la mitad de los días la farmacia vendió menos de 8,8 unidades de fármaco y la mitad de los días más de 8,8.



OPCIÓN B

Ejercicio 1: a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; |A| = 5m - 5. \quad |A| = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Para $m = 1$ la matriz A no es invertible.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; |A| = -5. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1 & 1/5 \\ -1/5 & -2 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 10 & 13 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^2 C = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 5 & -1 \\ 22 & -3 \end{pmatrix}$$

C no es invertible porque no es una matriz cuadrada.

Ejercicio 2:

a) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + 2a$. Para que f sea continua en $x = 0$,
 $a = 1 + 2a \Leftrightarrow a = -1$.

b) $\int_{-2}^{-1} (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} = \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{4}{2} \right) \right| = \left| \frac{-1}{4} - \frac{8}{4} \right| = \frac{9}{4} u^2 = 2'25 u^2$

c) $M = C(1+i)^n$

$M = 14641$; $i = 0'1$; $n = 4$

$1'1^4 \cdot C = 14641 \Leftrightarrow C = 10000$ euros.

Ejercicio 3:

a) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0'4 = 0'6$.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $P(A \cap B) = 0'6 + 0'3 - 0'8 = 0'1$.

c) $P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{A})} = \frac{1 - 0'8}{0'4} = \frac{0'2}{0'4} = 0'5$.

d) A y B no son independientes porque $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$

Ejercicio 4:

a) $P(X > 13) = P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{13-10}{2}\right) = P(Z > 1.5)$, con Z distribuida como una $N(0,1)$.

$P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$, valor obtenido utilizando las tablas de la Normal.

b) Para $n=100$, la media muestral se distribuye como una $N\left(10, \frac{2}{\sqrt{100}}\right)$. Por tanto:

$$P(\bar{X} < 9.5) = P\left(Z < \frac{9.5-10}{2/10}\right) = P(Z < -2.5) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z \leq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062 .$$

b) El error $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$. $Z_{\alpha/2} = 1.96$.

$$n \geq (Z_{\alpha/2})^2 \frac{\sigma^2}{E^2} = 1.96^2 \frac{2^2}{0.5^2} = 61.465 . \text{ Necesitamos una muestra de tamaño m\u00ednimo } 62 .$$