UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS
Curso **2015–2016**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES 2

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones que se le ofrecen (A o B) y sólo a una. Debe dar respuestas concisas y justificar los argumentos empleados.
Valoración: La puntuación de cada ejercicio, así como la de cada apartado, se indica en el encabezamiento de los mismos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1 **(3 ptos.)** En un depósito se almacenan bidones de petróleo y de gasolina, para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber al menos la misma cantidad de bidones de gasolina que de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 céntimos y el de uno de gasolina es de 30 céntimos. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

Ejercicio 2 **(3 ptos.)** Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + c$.

- **a) 1 pto.** Determínese a, b y c, sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos (-2,-3) y (1, 0).
- **b) 1 pto.** Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto (-2,-3).
- **b) 1 pto.** Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Ejercicio 3 **(2 ptos.)** En un laboratorio se obtubieron seis determinaciones del PH de una solución, con los resultados siguientes:

$$7,91 \quad 7,94 \quad 7,90 \quad 7,93 \quad 7,89 \quad 7,91$$

Se supone que la población de todas las determinaciones de PH de la solución tiene una distribución normal de media desconocida con una desviación típica igual a 0,02.

- **a) 1 pto.** Determínese un intervalo de confianza al 98 % para la media de todas las determinaciones del PH de la misma solución obtenidas con el mismo método.
- **b) 1 pto.** Con el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea a lo sumo 0,01?

Ejercicio 4 **(2 ptos.)** Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Si se seleccionan al azar 3 lotes. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos? (Trabajar este ejercicio con al menos 4 cifras decimales)

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1 **(3 ptos.)** Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parametro m:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 5 \\ -x + (m+2)z &= 3. \end{aligned}$$

a) 2 pto. Clasifique el sistema en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible para los diferentes valores de $m \in R$.

b) 1 pto. Resolver el sistema para $m = 3$.

Ejercicio 2 **(3 ptos.)** Sea

$$f(x) = x^3 - 4x$$

a) 1 pto. Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados, de sus máximos y mínimos relativos y de sus puntos de inflexión, si existen.

b) 1 pto. Halle los intervalos de crecimiento y de curvatura de f.

c) 1 pto. Calcule el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje OX.

Ejercicio 3 **(2 ptos.)** El peso de individuos de cierta especie se distribuye como una variable aleatoria normal con media 50 euros y desviación típica 4.

a) 1 pto. Calcular la probabilidad de que la media muestral obtenida con los valores de 16 individuos seleccionados aleatoriamente, esté entre 48 y 50.

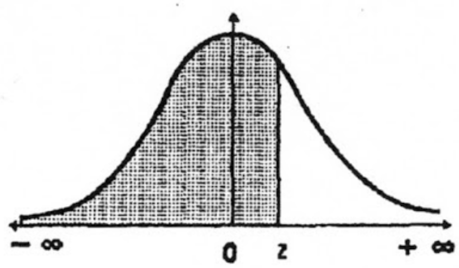
b) 1 pto. Se seleccionan aleatoriamente 4 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la muestra supere el valor 54?

Ejercicio 4 **(2 ptos.)** En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0,2. De estos solo un 60 % practican deporte regularmente. Mientras que entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, sólo un 30 % de ellos practica deporte regularmente. Si eligimos al azar un habitante de la población.

a) 1 pto. Calcúlese la probabilidad de que practique deporte regularmente.

b) 1 pto. Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que este siguiendo una dieta de adelgazamiento?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0;1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0;1), esté por debajo del valor z.

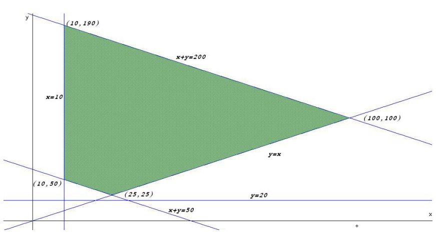
Solución Ejercicio 1.

Suponga que:

- x número de bidones de petróleo
- y número de bidones de gasolina.

El problema de Programación Lineal será

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar } \ 20x + 30y \\
&\text{sujeto a:} \\
&x + y \leq 200 \\
&x + y \geq 50 \\
&x \geq 10 \\
&y \geq 10 \\
&y \geq x
\end{aligned}$$



La Figura ilustra la región factible del problema.
Ahora se debe evaluar la función objetivo en cada vértice

- $f(10, 190) = 5900$.
- $f(100, 100) = 5000$.
- $f(25, 25) = 1250$.
- $f(10, 40) = 1400$.

Ya que se trata de un problema de minimización, es claro que la solución óptima se encuentra en el vértice $(25, 25)$.
Por lo tanto, la solución que minimiza el gasto de almacenaje es **tener 25 bidones de cada tipo.**

Solución Ejercicio 2.

Apartado a)

$$f(-2) = -3 \Rightarrow 4 - 2a + b = -3 \Rightarrow -2a + b = -7,$$
$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1,$$

de estas dos ecuaciones obtenemos que $a = 2$ y $b = -3$.

$$g(1) = 0 \Rightarrow -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

Las funciones son

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 \qquad g(x) = -x^2 + 1$$

Apartado b)

$$g'(x) = -2x \Rightarrow m = g'(-2) = 4, g(-2) = -3.$$

Luego la Recta Tangente es

$$y = 4(x + 2) - 3 = 4x + 5$$

Apartado c)

Los puntos de corte están en las abcisas $x = -2$ y $x = 1$, que serán los límites de integracion por lo tanto

$$A = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 + 1 - (x^2 + 2x - 3))dx = \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x \right]_{-2}^{1} = 9u^2$$

Solución Ejercicio 3.

Apartado a)

Tenemos $\bar{X} = 7,913$, $\sigma = 0;02$, $n = 6$ y $z_{\alpha/2} = 2,32$

$$IC = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (7,89; 7,93)$$

Apartado b)

$z_{\alpha/2} = 2,32$

$$L = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,01 = 2 \cdot 2,32\frac{0,02}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 2 \cdot \frac{2,32 \cdot 0,02}{0,01} = 9,3 \Rightarrow n = 86,12$$

Luego el menor tamaño de la mustra debe ser $n = 87$.

Solución Ejercicio 4.

$$P(2D) = P(DD\bar{D}) + P(D\bar{D}D) + P(D\bar{D}D) = 3 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95 = 0,007125$$
$$P(3D) = 0,05^3 = 0,000125$$
$$P(al\ menos\ dos) = P(2D) + P(3D) = 0,00725$$

SOLUCIÓN OPCIÓN **B**

Solución Ejercicio 1.

Apartado a)

La matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} (E2 : E2 - 2E1) \\ (E3 : E3 + E1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & m+4 & 8 \end{array}\right) \sim \ (E3 : E3$$

Y la matriz escalonada que queda es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \end{array}\right)$$

Por consiguiente para cualquier valor de m diferente de 1 el sistema es compatible determinado y para $m = 1$ es compatible indeterminado.

Apartado b)

Para $m = 3$ tenemos que $z = -0$, $y = 8$ y $x = -3$.

Solución Ejercicio 2.

Apartados a y b)

- Puntos de corte con el eje OX, hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$.
- Puntos de corte con el eje OY, hacemos $x = 0 \Rightarrow y = 0$, . Los puntos de corte son: $(0,0)$, $(-2,0)$ y $(2,0)$.
- $f'(x) = 3x^2 - 4$
- $f'(x) = 0 \implies x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- $f'(x)$ es una parábola que abre hacia arriba por lo tanto será positiva a la izquierda y a la derecha de los ceros y negativa etre ellos.

  Por lo tanto
- **f es creciente en** $(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ **y** $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty)$
- **f es decreciente en** $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

  Por consiguiente
- En $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3})\right)$ f tiene un mínimo y en $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{3})\right)$ f tiene un máximo.
- $f''(x) = 6x \implies f''(x) \leq 0$ si $x \leq 0$ y $f''(x) \geq 0$ si $x \geq 0$

  por lo tanto
- f tiene un punto de inflexión en $(0,0)$.
- f es convexa $[\cup]$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y concava $[\cap]$ en $(0, \infty)$

Apartado c)

Como la curva es simétrica

$$A = -2\int_0^2 f(x)dx = 2\int_2^0 (x^3 - 4x)dx = 2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right)\Big|_2^0 = 8u^2$$

Solución Ejercicio 3.

Apartado a)

La distribución sera $N\left(50, \frac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(50, 1)$

$$\begin{aligned} P(48 \leq \bar{X} \leq 50) &= P\left(\frac{48-50}{1} \leq Z \leq \frac{50-50}{1}\right) = P(-2 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) \\ &= f(0) + f(2) - 1 = 0,4772. \end{aligned}$$

Apartado b)

La distribucion sera $N\left(50, \frac{4}{\sqrt{4}}\right) = N(50, 2)$.

$$P(\bar{X} \geq 54) = P\left(Z \geq \frac{54-50}{2}\right) = P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \geq 2) = 0{,}0228$$

Solución Ejercicio 4.

Apartado a)

$$P(D) = 0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,36$$

Apartado b)

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,36} = 0,333$$