



Matemàtiques

Sèrie 1

SOLUCIONS, CRITERIS DE CORRECCIÓ I PUNTUACIÓ

Instruccions

- Trieu i resoleu CINC dels set exercicis que es proposen.
- Indiqueu clarament quins heu triat. Només se n'avaluaran cinc.
- Cada exercici val 2 punts.

Material necessari

- Material d'ús habitual: bolígraf, llapis i goma, regle, etc.
- Compàs i semicercle graduat.
- Calculadora científica.

Cadascú ha de portar el seu propi material. En cap cas no es permetrà la cessió de calculadores ni d'altres materials entre les persones aspirants.



1. Indiqueu si les afirmacions següents són certes o falses. Expliqueu-ne el perquè.
[2 punts]

a) $\sqrt{20+5}$ és un nombre irracional.

Falsa, ja que l'arrel de 25 és 5, que és un nombre racional (natural).

b) 3,261261... és un nombre racional.

Certa, ja que és un nombre decimal periòdic.

c) $\sqrt{4+a}=2\sqrt{a}$

Falsa, ja que només es poden extreure del radical nombres que siguin factors.

d) $3\sqrt{7}=\frac{21}{\sqrt{7}}$

Certa. Si racionalitzem el membre de la dreta o bé eliminem els denominadors es pot comprovar fàcilment la igualtat.

Compteu 0,5 punts per cada apartat, sempre que justifiquin la resposta. En cas contrari, compteu només 0,25 punts per cada apartat.

2. Calculeu i, si és possible, simplifiqueu les operacions següents:
[2 punts]

a) $2x(3x^2 - x + 5) - (2x - 3)(2x + 3) = 6x^3 - 2x^2 + 10x - (4x^2 - 9) = 6x^3 - 6x^2 + 10x + 9$

b) $\frac{x+2}{5x-25} \cdot \frac{10}{x^2+4x+4} = \frac{x+2}{5(x-5)} \cdot \frac{10}{(x+2)^2} = \frac{10 \cdot \cancel{(x+2)}}{5(x-5)(x+2)} = \frac{2}{(x-5)(x+2)}$

Compteu 1 punt per cada apartat ben respost. En l'apartat b, si no ho simplifiquen, compteu només 0,5 punts. Si calculen el darrer denominador, també doneu per bo el resultat.

3. Volem fer una imposició de 40000€ en una entitat financera durant el temps que calgui per a obtenir un capital acumulat (capital més interessos) de 60000€. Si ens ofereixen un 4% de rèdit anual, calculeu el temps necessari per a obtenir aquest capital final:

[2 punts]

- a) Amb un interès simple (recordeu que $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$)

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}; 20000 = \frac{40000 \cdot 4 \cdot t}{100}; t = \frac{20000 \cdot 100}{40000 \cdot 4} = 12,5$$

El temps necessari és 12,5 anys.

- b) Amb un interès compost (recordeu que $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$)

$$60000 = 40000 \cdot (1 + 0,04)^n; \frac{60000}{40000} = 1,04^n; 1,5 = 1,04^n$$

$$\ln 1,5 = \ln 1,04^n = n \ln 1,04; n = \frac{\ln 1,5}{\ln 1,04} = \frac{0,4055}{0,392} = 10,34$$

El temps necessari és 10,34 anys.

Compteu 1 punt per cada apartat ben respost.

4. Donats els punts del pla $A = (-1, 3)$ i $B = (2, -4)$ i els vectors $\vec{v} = (-10, 4)$ i $\vec{u} = (5, -2)$, calculeu:
[2 punts]

- a) El mòdul del vector \vec{v} .

$$|\vec{v}| = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116} \mathbf{u} = 2\sqrt{29} \mathbf{u}$$

- b) L'equació de la recta r que passa pel punt A i té la direcció del vector \vec{v} .

$$\frac{x+1}{-10} = \frac{y-3}{4}; 2x + 5y - 13 = 0; y = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}; \text{etc.}$$

c) L'equació de la recta s que passa pel punt B i té la direcció d'un vector perpendicular a \vec{u} .

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{5}; 5x-2y-18=0; y = \frac{5}{2}x-9; \text{ etc.}$$

d) La posició relativa de les rectes r i s calculades en els apartats b i c . Expliqueu raonadament la resposta.

Les rectes són perpendiculars, ja que el producte escalar dels vectors directors és zero.

Compteu 0,5 punts per cada apartat ben respost. En els apartats a i b , accepteu qualsevol de les equacions de la recta; en l'apartat d , accepteu altres raonaments que siguin correctes.

5. Donada la funció, definida a trossos, $f(x) = \begin{cases} 2x+m & \text{si } x < 1 \\ -x^2+4x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, resolcu les qüestions següents.
[2 punts]

a) Calculeu $f(1)$, $f(2)$ i $f(3)$ (imatges d'1, 2 i 3).

$$f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$$

$$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$$

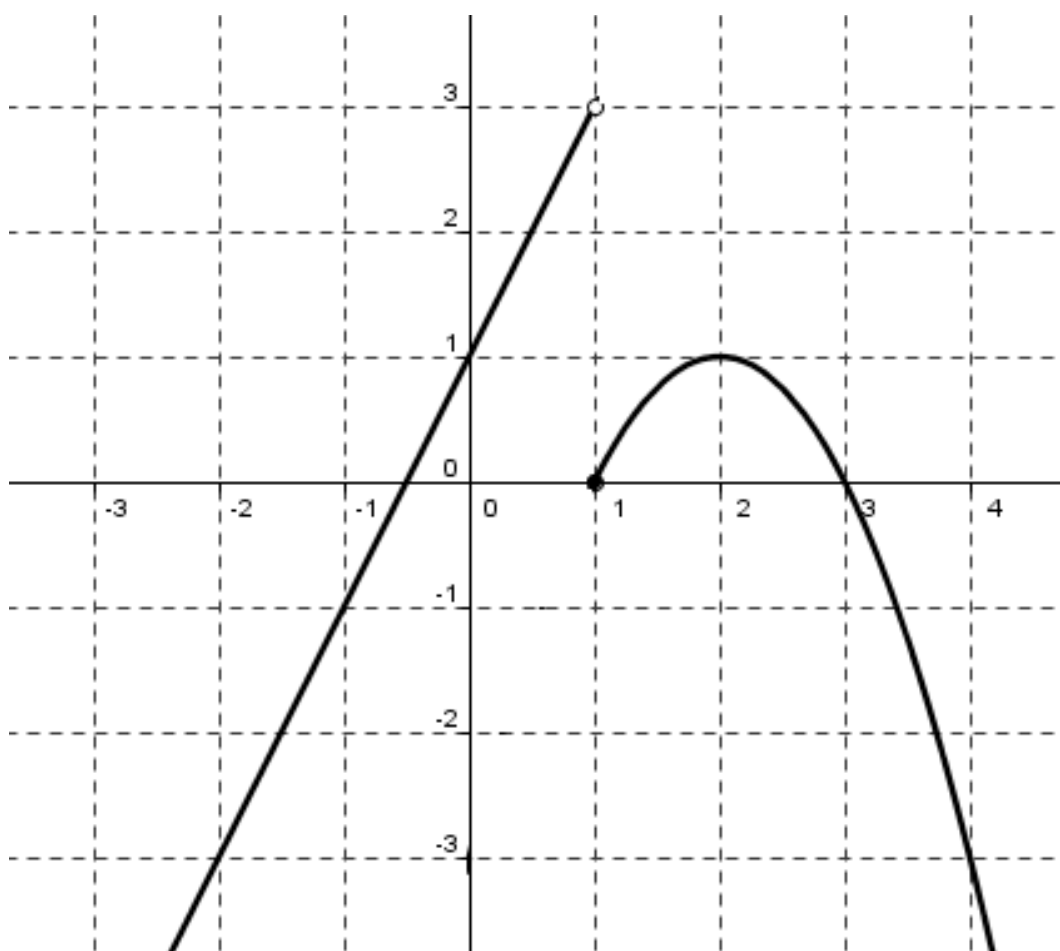
$$f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$$

b) Determineu el valor que ha de tenir m perquè $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+m) = 2 \cdot 1 + m = 2+m; 2+m=0; m=-2$$

c) Per a $m=1$, representeu gràficament la funció $f(x)$ següent en un sistema de coordenades:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2+4x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



d) Sobre la funció representada gràficament en l'apartat c, digueu quins són els extrems relatius i els punts de discontinuïtat, i especifiqueu-ne el tipus de cadascun.

Només té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=2$. És un màxim relatiu.

Té un punt de discontinuïtat no evitable (de salt finit) en el punt d'abscissa $x=1$.

Compteu 0,5 punts per cada apartat ben respost.

6. Donada la funció $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{1}{3}$, calculeu:
[2 punts]

a) $f(1)$ (imatge d'1) i les funcions derivades $f'(x)$ i $f''(x)$.

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - 1 - 3 - \frac{1}{3} = -4$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$$

$$f''(x) = 2x - 2$$

b) L'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=1$.

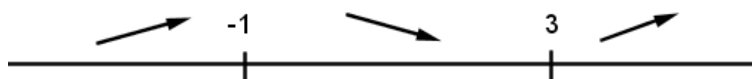
$$f'(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4; y + 4 = -4(x - 1)$$

c) Les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$.

$$x^2 - 2x - 3 = 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = 3 \\ = -1 \end{cases}; x = 3 \text{ i } x = -1$$

d) Els intervals de creixement i decreixement.

$$f'(-2) = 5 > 0 \quad f'(0) = -3 < 0 \quad f'(4) = 5 > 0$$



La funció és creixent en $(-\infty, -1)$ i en $(3, +\infty)$, i és decreixent en $(-1, 3)$.

Compteu 0,5 punts per cada apartat ben respost.

7. Disposem de dues urnes: l'urna A conté cinc boles numerades de l'1 al 5 i l'urna B conté set boles numerades de l'1 al 7.

[2 punts]

- a) Si escollim a l'atzar una bola de l'urna A, quina probabilitat hi ha que sigui de nombre parell?

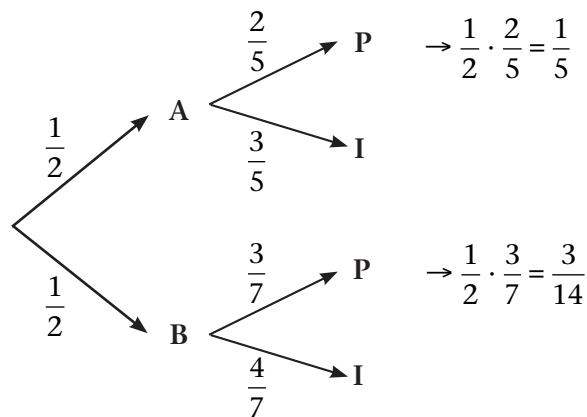
$$P(\text{parell}) = \frac{2}{5} = 0,4$$

- b) Si escollim a l'atzar una bola de l'urna B, quina probabilitat hi ha que NO sigui de nombre parell?

$$P(\text{imparell}) = \frac{4}{7} = 0,5714$$

A continuació tirem enlaire una moneda equilibrada (quan caigui hi ha la mateixa probabilitat que surti cara o que surti creu). Si surt cara, escollim a l'atzar una bola de l'urna A i, si surt creu, n'escollim una de l'urna B.

- c) Quina probabilitat hi ha que surti una bola de nombre parell?



$$P(\text{parell}) = \frac{1}{5} + \frac{3}{14} = \frac{29}{70} = 0,4143$$

- d) Si sabem que la bola obtinguda és de nombre parell, quina probabilitat hi ha que hagi sortit de l'urna A?

$$P(A/\text{parell}) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{14}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{29}{70}} = \frac{14}{29} = 0,4828$$

Compteu 0,5 punts per cada apartat ben respost.

